

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. a) Betrachten Sie die folgende (wahre) Aussage (*)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0 \quad \text{gilt} \quad [x^2 \leq y^2 \implies x \leq y] \quad (*)$$

und formulieren Sie die Negation dieser Aussage (ohne Verwendung des logischen Zeichens $\neg$).

- b) Zeigen Sie, daß (*) **ohne** die Einschränkung $x, y \geq 0$ falsch ist.
c) Zeigen Sie die folgende Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0 \quad \text{gilt} \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Dabei dürfen (*) sowie Schulkenntnisse (wie z.B. Definition und Eigenschaften der Wurzel, Bruchrechnung, Binomische Formeln, ...) verwendet werden.

2. Für eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die folgenden Aussagen:

$$A(z) : „z \text{ ist ungerade.}“ \quad \text{und} \quad B(z) : „z^2 \text{ ist ungerade.}“$$

- a) Zeigen Sie durch einen direkten Beweis:

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [A(z) \implies B(z)]$$

- b) Zeigen Sie durch einen indirekten Beweis:

$$\forall z \in \mathbb{Z} : [B(z) \implies A(z)]$$

3. Im folgenden werden die beiden Aussagen

P : „Für jeden Menschen gibt es eine Sprache, die er versteht.“

Q : „Es gibt eine Sprache, die jeder Mensch versteht.“

betrachtet.

- a) Formalisieren Sie die beiden Aussagen mit Hilfe logischer Verknüpfungen sowie der Abkürzung „ $V(x, y)$: x versteht y “; schreiben Sie dabei M für die Menge aller Menschen und S für die Menge aller Sprachen.
b) Entscheiden Sie, ob die Aussage P hinreichend bzw. notwendig für die Aussage Q ist.
c) Bilden Sie die Negationen $\neg P$ und $\neg Q$ der beiden Aussagen P und Q sprachlich und formal.
d) Entscheiden Sie, ob die Aussage $\neg P$ hinreichend bzw. notwendig für die Aussage $\neg Q$ ist.

4. a) Gegeben seien die Mengen $X = \{1, 2\}$ und $Y = \{2, 3\}$. Bilden Sie die Mengen

$$X \cap Y, \quad X \cup Y, \quad X \setminus Y, \quad X \times Y, \quad \mathcal{P}(X \times Y).$$

- b) Gegeben seien die Mengen $A = \{a, 1, x^2\}$ und $B = \{x, 5, 7\}$ mit $a, x \in \mathbb{R}$.

- i) Zeigen Sie

$$A \cup B = \{1, 5, 7, 9\} \iff x = 1 \wedge a = 9.$$

- ii) Ergänzen Sie in der folgenden Äquivalenz

$$A \subset B \iff (x = 1 \wedge ?)$$

an der Stelle ? zu einer wahren Aussage und beweisen Sie diese.

Für die Tutorien am 30.10. und 31.10.19